Djelovanje grupe na skup

Neka je X neki skup i neka je G neka grupa. Djelovanje grupe G na skup X (sa lijeve strane) je preslikavanje $G \times X \longrightarrow X$ dato sa $(g,x) \longrightarrow gx$, gdje

(i) $ex = x$ za sve $x \in X$

(ii) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ za sve $x \in X$ i za sve $g_1, g_2 \in G$.

Pod ovim uslovima skup X nazivamo G-skup. Primjetimo da ne zahtjevamo od skupa X da bude u bilo kakvoj vezi sa grupom G.

(#) Neka je $G = GL_2(\mathbb{R})$ i neka je $X = \mathbb{R}^2$. Pokazati da G djeluje na X pomoću lijevog množenja.

Rj.

Trebamo pokazati da vrijede osobine (i) i (ii) iz definicije djelovanja grupe na skup.

Jedinica grupe G je jedinična matrica I.

Primjetimo da je $Iv = v$ za $\forall v \in \mathbb{R}^2$.

vrijedi (i) osobina.

S druge strane imamo da, ako su A i B 2×2 invertibilne matrice tada

$$(AB)v = A(Bv) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

s obzirom da je množenje matrica asocijativno.

(#) Neka je $G = S_5$ i neka je

$$X = \{ \{i,j\} \mid i \neq j,\ i,j \in \{1,2,3,4,5\} \}.$$

Pokazati da grupa G djeluje na skup X pomoću preslikavanja u odnosu na preslikavanje

$$G \times X \to X$$
$$\sigma\{i,j\} \to \{\sigma i, \sigma j\}$$

Rj.: Trebamo pokazati da vrijede osobine (i) i (ii) iz definicije djelovanja grupe na skup.

Neka je $x \in X$ proizvoljan element skupa X npr. $x = \{i,j\}$

$$id\, x = id\,\{i,j\} = \{id(i), id(j)\} = \{i,j\} = x$$

vrijedi prva osobina

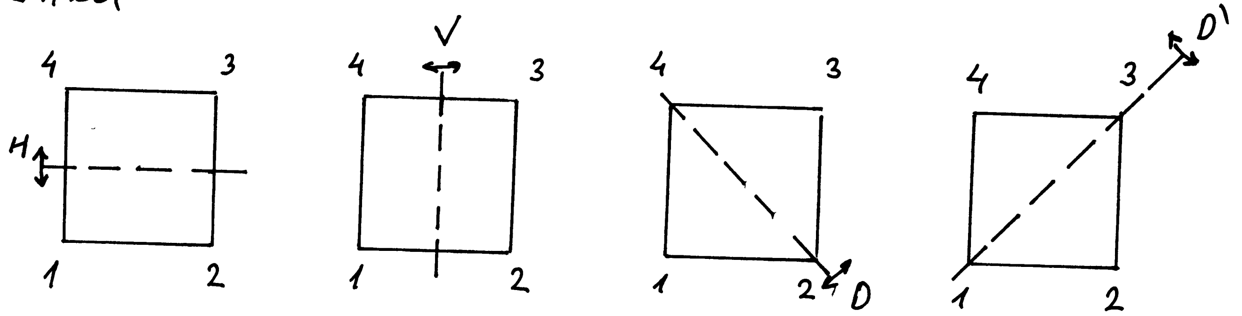
$\forall \alpha, \beta \in G$ $(\alpha, \beta \in S_5)$

$$(\alpha\beta)x = (\alpha\beta)\{i,j\} = \{(\alpha\beta)(i), (\alpha\beta)(j)\} =$$
$$= \{\alpha(\beta(i)), \alpha(\beta(j))\} = \alpha\{\beta(i), \beta(j)\}$$
$$= \alpha(\beta\{i,j\}) = \alpha(\beta x)$$

vrijedi druga osobina

Grupa G djeluje na skup X.

Dat je kvadrat čiji su vrhovi označeni brojevima 1, 2, 3 i 4. Neka je $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$ dihedralna grupa reda 8 gdje R_α predstavlja rotaciju za ugao α, dok su refleksije H, V, D i D' definisane prikazane pomoću sljedećih slika



Obrazložiti na koji način elementi R_0, H i D' grupe D_4 djeluju na vrhove 1 i 3. Ako je $X = \{1, 2, 3, 4\}$ napisati grupu D_4 u obliku grupe permutacija skupa X. Pokazati da grupa D_4 djeluje na skup X.

Rj: Svi elementi iz D_4 djeluju na vrhove kvadrata kao f-je.

1 se pomoću R_{90} preslikava u 2

3 se pomoću R_{90} preslikava u 4

1 se pomoću H preslikava u 4

3 se pomoću H preslikava u 2

Slično $D'(1) = 1$ i $D'(3) = 3$.

Grupu D_4 možemo posmatrati kao sljedeću grupu permutacija

$$\{(1), (1234), (13)(24), (1432), (14)(23), (12)(34), (13), (24)\}$$

Trebamo još pokazati da su (i) i (ii) iz definicije djelovanja grupe na skup zadovoljeni.

Jedinica od D_4 je (1)

$$(1)x = x \quad \forall x \in X$$

S druge strane kako je

$$(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x)) \quad \text{za } \forall \alpha, \beta \in D_4 \text{ i } \forall x \in X$$

to grupa D_4 djeluje na skup X.

(#) Data je grupa G i neka je $X = G$. Definišimo preslikavanje $(X, G) \longrightarrow X$ na sljedeći način

$$x^g = g x g^{-1}$$

(ovako definisano preslikavanje nazivamo konjugacija). Pokazati da je konjugacija djelovanje grupe.

Rj. Trebamo pokazati da vrijede dvije osobine iz definicije djelovanja grupe.

$x^e = e x e^{-1} = x \implies$ vrijedi (i) osobina

$$x^{(gh)} = (gh)x(gh)^{-1} = (gh)x(h^{-1}g) =$$
$$= g(hxh^{-1})g^{-1} = g x^h g^{-1} = (x^h)^g$$

$(gh)(x)$

$g(hx)$

vrijedi (ii) osobina

Grupa G djeluje na skup X.

(#) Pretpostavimo da grupa G djeluje na skup X.

(a) Pokazati da ako $x \in X$, $g \in G$ i $y = gx$ tada $x = g^{-1}y$.

(b) Pokazati da ako $x \neq x'$ tada $gx \neq gx'$.

dokaz:

(i)

$$y = gx$$

$$g^{-1}y = g^{-1}(gx)$$

$$g^{-1}y = (g^{-1}g)x$$

$$g^{-1}y = ex$$

$$g^{-1}y = x$$

(ii) Neka je $x \neq x'$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $gx = gx'$

$$gx = gx' \Rightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}(gx')$$

$$(g^{-1}g)(x) = (g^{-1}g)(x')$$

$$ex = ex'$$

$$x = x'$$

#kontradikcija

(sa tvrdnjom da je $x \neq x'$)

Teorema

Neka je X G-skup. Za svaki $g \in G$, f-ja $\sigma_g : X \to X$ definisana sa $\sigma_g(x) = gx$ za $x \in X$ je permutacija skupa X. Također, preslikavanje $\phi : G \to S_X$ definisano sa $\phi(g) = \sigma_g$ je homomorfizam sa osobinom da $\phi(g)(x) = gx$.

(#) Dokazati teoremu iznad.

Rj. Pokažimo da je σ_g permutacija skupa X.

σ_g JE 1-1

$\forall x_1, x_2 \in X$

$$\sigma_g(x_1) = \sigma_g(x_2) \Rightarrow gx_1 = gx_2 \Rightarrow g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2) \xRightarrow{\text{na osnovu osobine (ii)}}$$

$$\Rightarrow (g^{-1}g)x_1 = (g^{-1}g)x_2 \Rightarrow ex_1 = ex_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_g \text{ je } 1\text{-}1 \quad \ldots (1)$$

σ_g JE NA

$$\forall x \in X \quad \sigma_g(g^{-1}x) = g(g^{-1}x) \overset{\text{osob. (ii)}}{=} ex = x \Rightarrow \sigma_g \text{ preslikava } X \text{ na } X \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ σ_g je permutacija skupa X.

ϕ JE HOMOMORFIZAM

$$\phi(g_1g_2)(x) = \sigma_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)(x) = g_1(g_2x) = g_1 \underbrace{\sigma_{g_2}(x)}_{\in X} =$$

$$= \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) = (\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2})(x) = (\sigma_{g_1}\sigma_{g_2})(x) = (\phi(g_1)\phi(g_2))(x)$$

Definicija (orbita od x u odnosu na G)

Neka je X G-skup. Skup
$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$
nazivamo orbita elementa x u odnosu na djelovanje grupe G na skupu X.

(#) Data je grupa $G = \{(1), (123), (132), (45), (123)(45), (132)(45)\} \leq S_5$, i dat je skup $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (X je G-skup). Odrediti orbite skupa X u odnosu na grupu G.

Rj:

$G1 = \{1, 2, 3\}$

$G2 = \{1, 2, 3\}$

$G3 = \{1, 2, 3\}$

$G4 = \{4, 5\}$

$G5 = \{4, 5\}$

(#) Neka je $G \subseteq Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ grupa svih invertibilnih matrica i neka je $X = \mathbb{R}^2$ (G djeluje na skup X). Odrediti orbite skupa X u odnosu na grupu G.

Rj: $X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Posmatrajmo element $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in X$. Primjetimo da je $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ za $\forall A \in G$. Drugim rječima $G\mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$.

S druge strane za $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in X$ ($a \neq 0$ ili $b \neq 0$) imamo da

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ uvijek ima rješenje $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

tj. orbita bilo kojeg drugog elementa iz X je $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$$G\mathbf{a} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \ \mathbf{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

(#) Odrediti orbite djelovanja podgrupe $H = \langle (13), (247) \rangle \leq S_8$ na skupu $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Rj.:

$H1 = \{1, 3\}$

$H2 = \{2, 4, 7\}$

$H3 = \{1, 3\}$

$H4 = \{2, 4, 7\}$

$H5 = \{5\}$

$H6 = \{6\}$

$H7 = \{2, 4, 7\}$

$H8 = \{8\}$

(#) Neka je G data grupa i neka je $X = G$. Grupa G djeluje na skup X pomoću lijevog množenja. Odrediti orbite skupa X u odnosu na djelovanje grupe G.

Rj.

Pokazaćemo da je $Ga = G$ za $\forall a \in G$.

Izaberimo dva proizvoljna elementa $a, b \in X$.

Ako stavimo da je $g = ba^{-1}$ tada je $g \in G$ i

$$ga = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = be = b$$

tj. element g preslikava a u b. Kako su a i b proizvoljni ovo znači da uvijek možemo pronaći element grupe G koji preslikava bilo koji proi elem. u bilo koji drugi. Drugim riječima

$$Ga = G \quad \forall a \in X.$$

<u>Definicija</u> (stabilizator elementa x u grupi G)

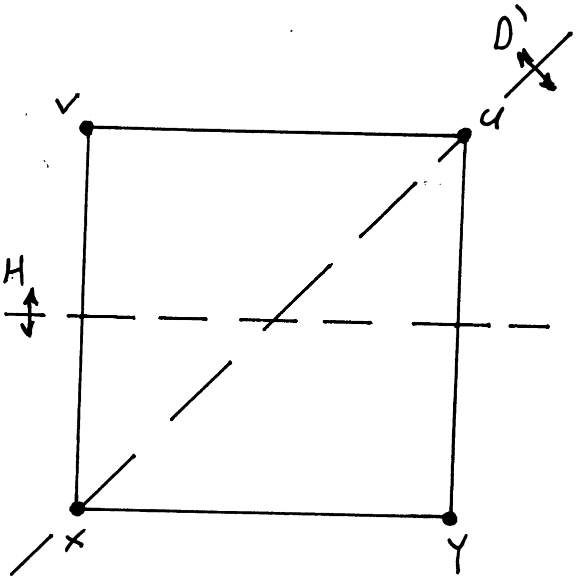
Neka je X G-skup i neka je $x \in X$. Skup

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

nazivamo stabilizator elementa x u grupi G.

(#) Označimo sa X kvadrat, i neka je G grupa svih simetrija kvadrata X ($G = Sym(X)$). Primjetimo da G djeluje na X. Ako sa x označimo neki vrh kvadrata X odrediti orbitu i stabilizator elementa $x \in X$.

Rj. Primetimo da je $G = D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$. (dihedralna grupa reda 8)



Vrhove kvadrata označimo redom sa x, Y, u i v.

Tada je orbita elementa x

$$Gx = \{x, Y, u, v\}$$

(orbita bilo kojeg vrha je skup od sve četiri vrha kvadrata)

Stabilizator vrha je ciklička podgrupa reda 2, generisana pomoću refleksije kroz dijagonalu kvadrata koja prolazi kroz dati vrh.

U slučaju sa slike je $G_x = \{R_0, D'\}$.

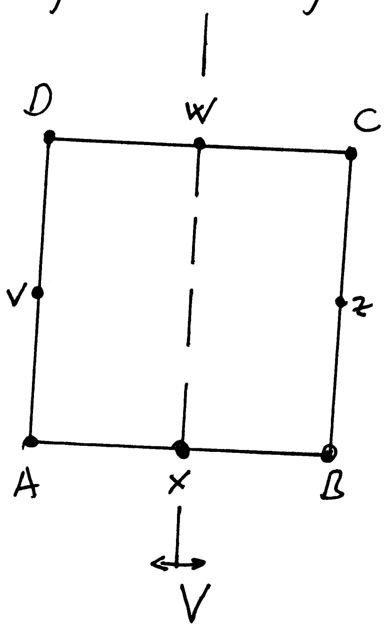
(#) Označimo sa X kvadrat i neka je G grupa svih simetrija kvadrata X ($G = Sym(X)$). Primjetimo da grupa G djeluje na skup X. Odrediti orbite i stabilizator elementa $x \in X$ ako je

(a) x sredina neke stranice kvadrata

(b) x tačka na $\frac{1}{3}$ dužine neke stranice kvadrata

Rj: Primjetimo da je $G = D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$.

(a)



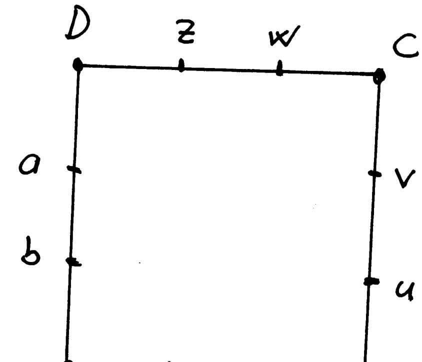
Vrhove kvadrata označimo redom sa A, B, C i D, a sredine stranica označimo sa x, z, w i v.

Orbita od x je $Gx = \{x, z, w, v\}$ (sve četri sredine stranica)

Stabilizator sredine stranice je generisana refleksijom kroz pravu koja siječe kvadrat u tački x i u sredini suprotne stranice.

Sa slike $G_x = \{R_0, V\}$

(b) Uredimo oznake kao sa slike.



Tada je $Gx = \{x, Y, u, v, z, w, a, b\}$.

$G_x = \{R_0\}$

(Y je tačka koja se nalazi na $\frac{2}{3}$ dužine str. $\overline{AB}$, u je tačka koja se nalazi na $\frac{1}{3}$ dužine str. $\overline{BC}$, ...)

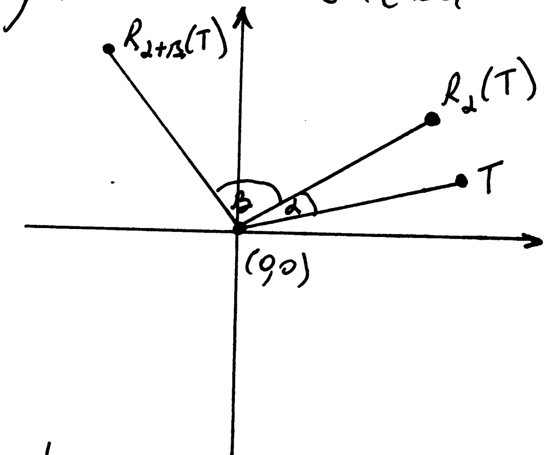
(#) Neka je G grupa realnih brojeva u odnosu na operaciju sabiranja. i neka je $X = \mathbb{R}^2$. Neka je djelovanje elementa $\alpha \in G$ dano s rotacijom ravni X oko tačke $(0,0)$ za α radijana u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu. Neka je T proizvoljna tačka u ravni.

(a) Pokazati da je X G-skup.

(b) Geometrijski opisati orbitu koja sadrži tačku T.

(c) Odrediti stabilizator G_T.

Rj.



$$(G, X) \to X$$

$$(\alpha, T) \to R_\alpha(T)$$

$R_\alpha(T)$ je rotacija tačke T oko tačke $(0,0)$ za α radijana u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu.

(a)

0 je neutralni element grupe G

$$R_0(T) = T \quad \forall T \in \mathbb{R}^2$$

rotacija za 0 radijana

vrijedi prva osobina iz definicije djelovanja grupe na skup

Neka su $\alpha, \beta \in G$ dva proizvoljna realna broja

$R_{\alpha+\beta}(T)$ = tačka koja je rotirana za $\alpha+\beta$ radijana oko tačke $(0,0)$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu. ...(1)

$R_\alpha(R_\beta(T))$ = tačka koja je rotirana za $\beta+\alpha$ radijana oko tačke $(0,0)$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu ...(2)

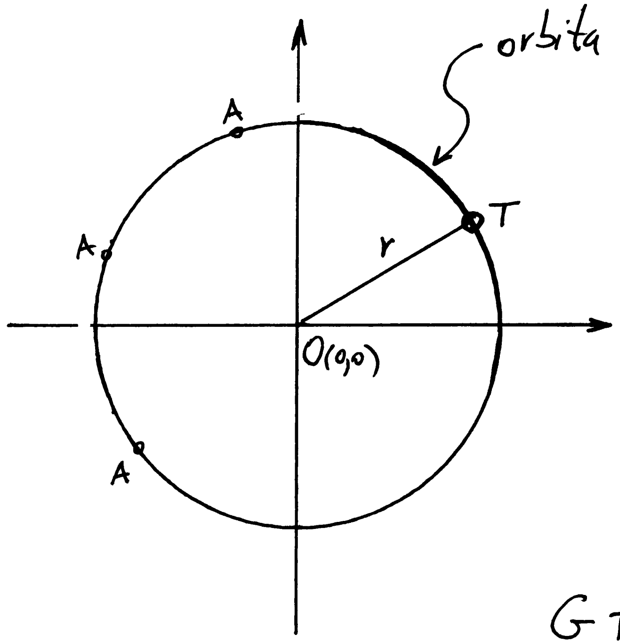
tačka koja je rotirana za β radijana

(1) i (2) $\Rightarrow$ $R_{\alpha\beta}(T) = R_\alpha(R_\beta(T)) \quad \forall \alpha,\beta \in G$
$\forall T \in \mathbb{R}^2$

vrijedi (ii) osobina

Prema tome X je G-skup.

(b)



$$G_T = \{A \in X \mid |\overline{AO}| = |\overline{TO}|\}$$
$$= \{A \in X \mid \overline{AO} \cong \overline{TO}\}$$

Ako označimo sa $r = |\overline{OT}|$
$(r = OT)$

$$G_T = \{A \in X \mid OA = r\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

orbita koja sadrži tačku T

(c)

$$G_T = \{R_\alpha \mid \alpha = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots\} =$$
$$= \{R_\alpha \mid \alpha = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Teorem

Neka je X G-skup i neka su $x \in X$, $g \in G$ proizvoljni elementi. Tada $G_{gx} = g G_x g^{-1}$. Štaviše, ako je H neki neprazan skup tada $G_{gH} = g G_H g^{-1}$.

Dokazati teoremu iznad.

Rj.:

$$h \in G_{gx} \iff h(gx) = gx \iff$$

$$\iff g^{-1} h g x = g^{-1} g x$$

$$\iff g^{-1} h g x = x$$

$$\iff g^{-1} h g \in G_x$$

$$\iff h \in g G_x g^{-1}$$

Time imamo da $h \in G_{gx} \iff h \in g G_x g^{-1}$, tj.

$$G_{gx} = g G_x g^{-1}.$$

Slično

$$h \in G_{gH} \iff h(gH) = gH \iff g^{-1} h g H = H \iff$$

$$\iff g^{-1} h g \in G_H \iff h \in g G_H g^{-1}$$

(#) Neka je $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\sigma=(1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8\,9)$, $\tau=(1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)$, $G=\langle\sigma,\tau\rangle$. Posmatrajmo djelovanje grupe G na skup X, i primjetimo da je $\tau\in G_9$ i da je $\tau\in G_{\{3,4\}}$. Bez direktnog računanja šta možemo reći o $\sigma\tau\sigma^{-1}$?

Rj.

Ako je $x\in X$ i $\sigma\in G$ prema prethodnoj teoremi: $G_{\sigma x}=\sigma G_x\sigma^{-1}$.

Kako je $\sigma 9=7$ to je

$$G_7=\sigma G_9\sigma^{-1}$$

S obzirom da je $\tau\in G_9$ to je $\sigma\tau\sigma^{-1}\in G_7$ ...(1)

S druge strane $G_{\sigma H}=\sigma G_H\sigma^{-1}$

tj $G_{\sigma\{3,4\}}=\sigma G_{\{3,4\}}\sigma^{-1}$

$$G_{\{1,5\}}=\sigma G_{\{3,4\}}\sigma^{-1}.$$

Kako je $\tau\in G_{\{3,4\}}$ to je $\sigma\tau\sigma^{-1}\in G_{\{1,5\}}$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}$ je permutacija koja fiksira 7 i koja fiksira skup $\{1,5\}$.

(#) Dat je pravilan petougao čiji su vrhovi označeni brojevima 1, 2, 3, 4 i 5. Ako su $\rho = (1\,3\,5\,2\,4)$ i $\mu = (25)(34)$ bez direktnog računanja odrediti $\rho\mu\rho^{-1}$.

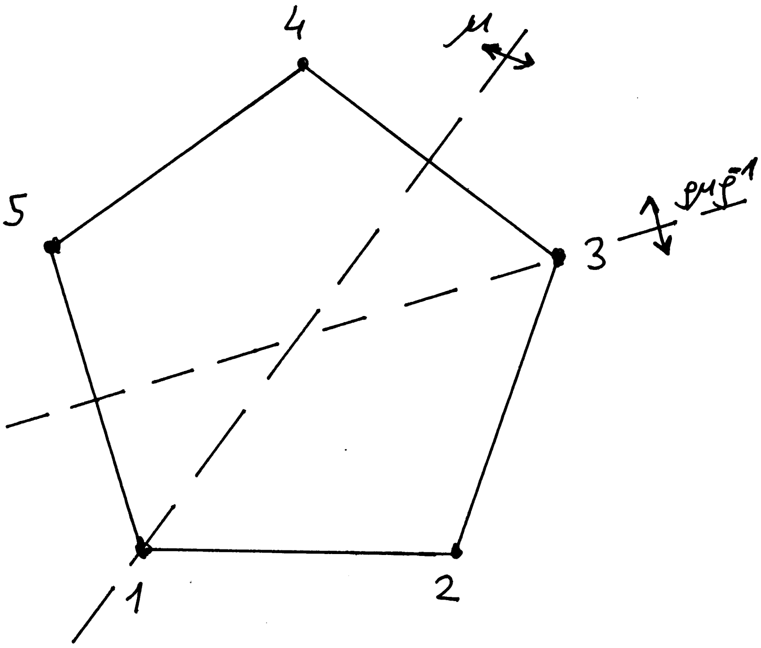
Rj.

Na osnovu prethodne teoreme imamo da

$$G_{\rho x} = \rho\, G_x\, \rho^{-1}. \qquad \dots (1)$$

· Primjetimo da $\mu \in G_1$

$(1) \Rightarrow \quad \rho\mu\rho^{-1} \in G_{\rho 1} = G_3 \quad \Rightarrow \quad \rho\mu\rho^{-1} \in G_3$



Primjetimo da je ρ rotacija, dok je μ refleksija.

Kako je $\rho\mu\rho^{-1}$ refleksija koja fiksira 3 to je

$$\rho\mu\rho^{-1} = (15)(24).$$

Teorema

Neka je X G-skup i neka su $x \in X$ i $g \in G$. Ako je $gx = y$ i $T = \{t \in G \mid tx = y\}$ tada je $T = gG_x$.

\# Dokazati teoremu iznad.

Rj.:

Pokažimo da je $gG_x \subseteq T$ i da je $T \subseteq gG_x$.

$\subseteq$:

$t \in gG_x \Rightarrow \exists h \in G_x$ t.d. $t = gh \Rightarrow$

$$\Rightarrow tx = (gh)x = g(hx) = gx = y \Rightarrow tx = y$$

$$\Rightarrow t \in T \Rightarrow gG_x \subseteq T \quad \dots(1)$$

$\supseteq$:

$$t \in T \Rightarrow tx = y = gx \Rightarrow g^{-1}tx = g^{-1}gx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{-1}tx = x \Rightarrow g^{-1}t \in G_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in gG_x \Rightarrow T \subseteq gG_x \quad \dots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow T = gG_x$$

$$gG_x = \{t \in G \mid tx = gx\}$$

Teorema (orbita-stabilizator teorem)

Neka je X G-skup i neka je $x \in X$. Tada

$$|Gx| = [G : G_x].$$

Ako je $|G|$ konačno, tada je $|Gx|$ djelilac od $|G|$.
Štaviše
$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|.$$

Dokazati teoremu iznad.

Rj. Definisat ćemo 1-1 preslikavanje $\psi : Gx \to$ familiju lijevih klasa od G_x u G

tj. $\psi : Gx \to G/G_x = \{gG_x \mid g \in G\}$

$x_1 \to g_1 G_x$ (gdje je $g_1 \in G$ t.d. $g_1 x = x_1$)

Trebamo pokazati da je ψ dobro definisano tj da ne zavisi od izbora $g_1 \in G$ za koje je $g_1 x = x_1$.

ψ JE DOBRO DEFINISANO

Pretpostavimo da su $g_1, g_1' \in G$ t.d. $g_1 x = x_1$ i $g_1' x = x_1$ za neki $x_1 \in Gx$. Tada na osnovu prethodne teoreme

$$\left.\begin{array}{l} g_1 G_x = \{t \in G \mid tx = x_1\} \\ g_1' G_x = \{t \in G \mid tx = x_1\} \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 G_x = g_1' G_x \Rightarrow \psi \text{ je dobro definisano}$$

ψ JE 1-1

$x_1, x_2 \in Gx$, $\psi(x_1) = \psi(x_2) \Rightarrow \exists g_1, g_2 \in G$ $g_1 x = x_1$, $g_2 x = x_2$, $g_1 x = g_2 x$

$\Rightarrow g_1^{-1} g_2 x = x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in G_x \Rightarrow g_2 \in g_1 G_x \Rightarrow g_2 = g_1 g$ za neko $g \in G_x$

$\Rightarrow x_2 = g_2 x = g_1(gx) = g_1 x = x_1 \Rightarrow \psi$ je 1-1

ψ JE NA

Želimo pokazati da je svaka lijeva klasa od G_x u G

oblika $\psi(x_1)$ za neko $x_1 \in Gx$.

Neka je $g_1 G_x$ neka lijeva klasa.

Tada ako je $g_1 x = x_1$ imamo da $g_1 G_x = \psi(x_1)$.

Time smo pokazali da je ψ bijekcija sa Gx na G/G_x

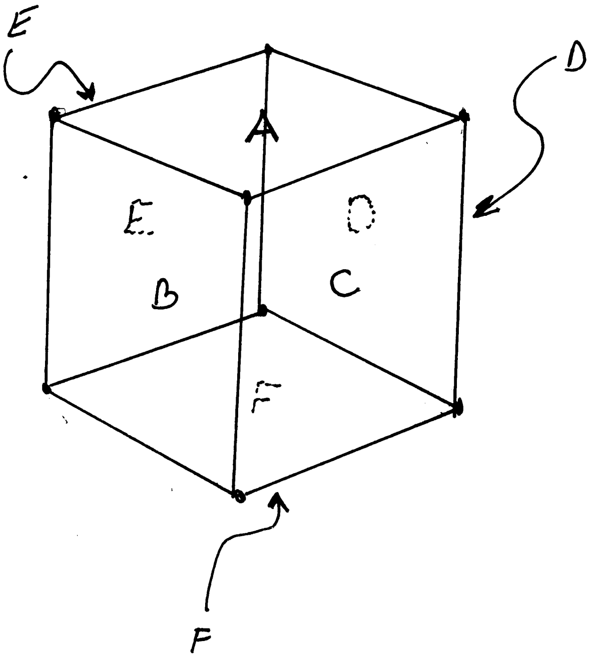
$$\Rightarrow \quad |Gx| = [G : G_x]$$

Ako je $|G|$ konačno, tada jednakost $|G| = |G_x| \cdot [G : G_x]$
$\left([G : G_x] = \dfrac{|G|}{|G_x|} \right)$ pokazuje da $|Gx| = [G : G_x]$
je djelilac od $|G|$.

Neka je X kocka i neka je $G = RotSym(X)$ (grupa svih rotacionih simetrija kocke X). Odrediti red grupe G.

Rj.

Strane (lica) kocke označimo sa A, B, C, D, E i F (vidi sliku).



GA je orbita stranice A

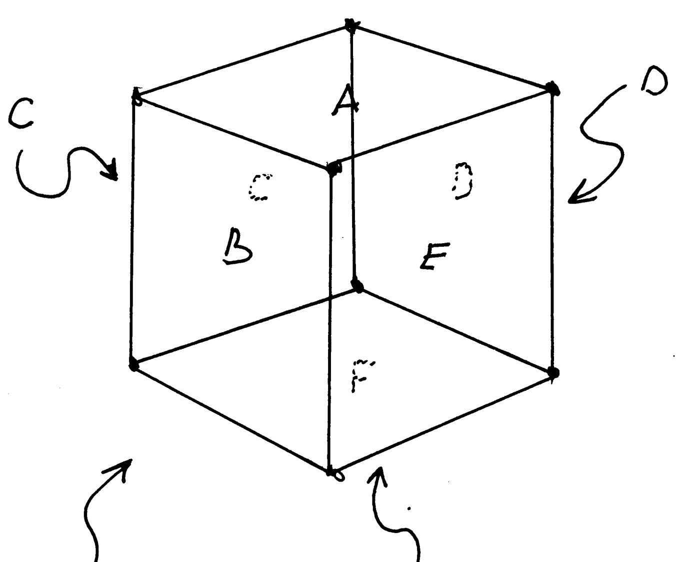
G_A je stabilizator stranice A

$$|G| = |GA| \cdot |G_A| = 6|G_A|$$

$$|G_A| = |G_A B| \cdot |G_{AB}| = 4\,|G_{AB}|$$

stabilizator strana A i B

$$|G_{AB}| = |G_{AB} C| \cdot |G_{ABC}| = 1\,|G_{ABC}| = 1 \cdot 1 = 1$$

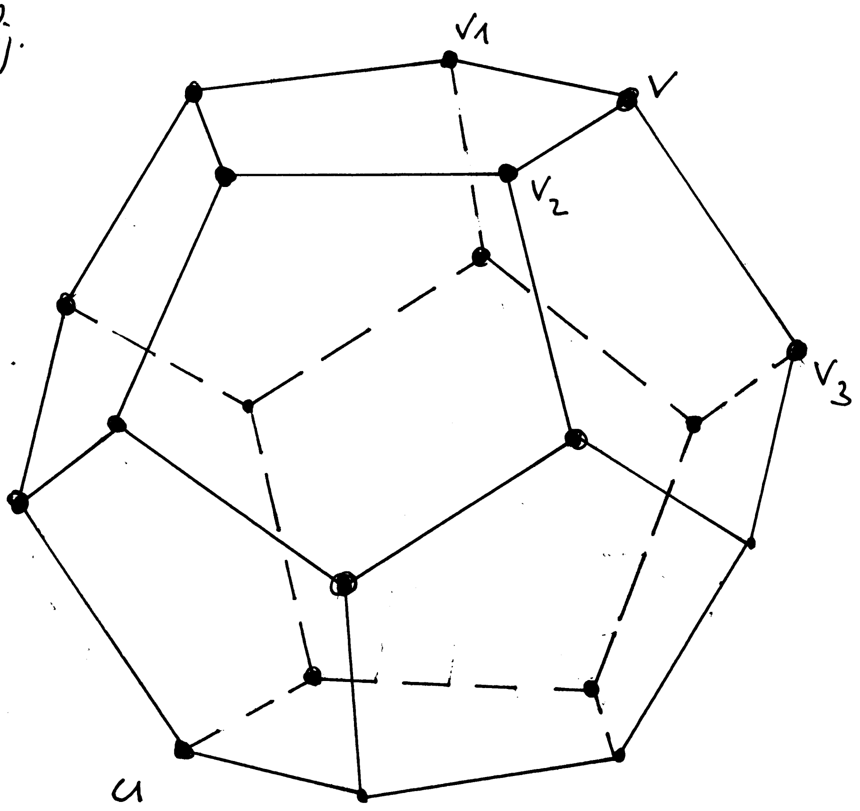


$$|G| = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24$$

ovo nije moguće dobiti rotacionom simetrijom

(#) Označimo sa X dodekaedar i neka je $G = RotSym(X)$ grupa svih rotacionih simetrija dodekaedra X. Odrediti red grupe G.

Rj.



Prisjetimo se da dodekaedar ima 20 vrhova i da se oko njega može opisati sfera.

Svaki vrh v se može preslikati u svaki drugi pomoću rotacije a time $|Gv| = 20$.

$$|G| = |Gv| \cdot |G_v|$$

Posmatrajmo G_v. Koliko postoji rotacija koje fiksiraju vrh v?

Posmatrajmo rotaciju čija je osa u pravoj koja prolazi kroz vrhove u i v (vidi sliku)

$$|G_v| = 3$$

II način

$$|G_v| = \underbrace{|G_v v_1|}_{=3} \cdot \underbrace{|G_{vv_1}|}_{=1}$$

$G_v v_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$

Prema tome

$$|G| = 20 \cdot 3 = 60$$

Dodekaedar X ima 60 rotacionih simetrija.

(#) Neka je $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\sigma = (123)(456)(789)$, $\tau = (12)(34)(56)(78)$, $G = \langle \sigma, \tau \rangle$. Posmatramo djelovanje grupe G na skup X.

(a) Šta je orbita djelovanja grupe G na element 2? na element 6? na element 8?

(b) Izraziti $|G_1|$ preko $|G|$.

(c) Neka je $Y = \{\{a,b\} \mid a,b \in X\}$. Da li G djeluje na Y? Zašto? Kako? Šta možemo reći o orbitama?

(d) Primjetimo da $\tau \in G_9$ i da $\tau \in G_{\{3,4\}}$. Na osnovu toga šta možemo reći o $\sigma\tau\sigma^{-1}$?

Rj.

(a)
$$G2 = \langle \sigma, \tau \rangle 2 = \{3,1,2,4,5,6,5\} = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$G6 = \langle \sigma, \tau \rangle 6 = \{6,4,5,3,1,2\} = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$G8 = \langle \sigma, \tau \rangle 8 = \{9,7,8\} = \{7,8,9\}$$

Primjetimo da $G2 = G6$, $G2 \cap G8 = \emptyset$, $G2 \cup G8 = X$

(b)
$$|G| = |G1| \cdot |G_1| = 6|G_1| \Rightarrow |G_1| = \frac{1}{6}|G|$$

(c) $\forall \mu \in G \ \forall a,b \in X$
$$\mu\{a,b\} = \{\mu a, \mu b\}$$
$$id\{a,b\} = \{a,b\}$$
$$(\eta\mu)\{a,b\} = \eta(\mu\{a,b\})$$

Da G djeluje na Y

$$G\{a,b\} = \{Ga, Gb\}$$

Orbite su oblika $O_1 = \{\{a,a\} \mid a \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$O_2 = \{ \{b, b\} \mid b \in \{7, 8, 9\} \}$

$O_3 = G\{1,2\}$

$O_4 = G\{1,7\}$

$O_5 = G\{1,5\}$

S obzirom da je $|G| = 24$
moguće veličine orbita su
orbite su veličine 1, 3, 4, 6, 8, 12 i 24.

Npr. $G\{1,2\} = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{2,1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, \{5,6\}, \{6,1\}, \{6,3\}, \{6,4\}, \{6,5\} \}$

$$\begin{tikzcd}
\{5,2\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{6,3\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{4,1\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{6,1\} & \{5,4\} & \{3,2\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{6,1\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{4,2\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{5,3\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{5,2\} & \{3,1\} & \{6,4\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{1,2\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \boxed{\{2,3\}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{3,1\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{2,1\} & \{1,4\} & \{4,2\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{5,4\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{6,5\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{4,6\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{6,3\} & \{5,6\} & \{3,5\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{3,2\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{1,3\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \boxed{\{2,1\}} \arrow[d, "\tau"] \\
\{4,1\} & \{2,4\} & \{1,2\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\boxed{\{2,4\}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{3,5\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{1,6\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{1,3\} & \{4,6\} & \{2,5\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\{2,5\}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{3,6\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{1,4\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{1,6\} & \{4,5\} & \{2,3\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{4,5\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{5,6\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"] & \{6,4\} \arrow[d, "\tau"] \\
\{3,6\} & \{6,5\} & \{5,3\}
\end{tikzcd}$$

(d) Ovaj dio smo uradili ranije.

$\sigma\tau\sigma^{-1}$ je permutacija koja fiksira 7 i koja fiksira skup $\{1,5\}$.

(#) Pretpostavimo da grupa G djeluje na skup X.

(a) Pokazati da su različite orbite disjunktne.

(b) Za proizvoljni element $x \in X$ pokazati da je stabilizator G_x elementa x, podgrupa grupe G.

R:

(a) Pokazaćemo da su dvije orbite disjunktne tako što ćemo dokazati da dvije orbite koje se preklapaju moraju biti iste. Pretpostavimo da orbite Gx i Gy $(x, y \in X)$ imaju zajednički element z.

$$z \in Gx \cap Gy \Rightarrow z \in Gx \text{ i } z \in Gy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists g_1, g_2 \in G \text{ t.d. } z = g_1 x \text{ i } z = g_2 y$$

Želimo pokazati da je $Gx = Gy$.

$\subseteq$: $\forall u \in Gx$ imamo da $\exists g \in G$ $u = gx$

$$z = g_1 x \Rightarrow x = g_1^{-1} z$$

$$u = gx = g(g_1^{-1} z) = (gg_1^{-1}) z = (gg_1^{-1}) g_2 y = (gg_1^{-1} g_2) y$$

$$\Rightarrow u = hy \text{ gdje je } h \in G \quad (h = gg_1^{-1} g_2,\ g, g_1, g_2 \in G)$$

$$\Rightarrow u \in Gy \Rightarrow Gx \subseteq Gy \quad \dots(1)$$

$\supseteq$: Slično, ako zamijenimo uloge od x i y dobićemo da je $Gy \subseteq Gx$ ...(2)

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow Gx = Gy.$$

(b)

ZATVORENOST

$g_1, g_2 \in G_x \Rightarrow g_1 x = x$ i $g_2 x = x$

$x(g_1 g_2) = (x g_1) g_2 = x g_2 = x \Rightarrow g_1 g_2 \in G_x$

G_x je zatvoren u odnosu na operaciju množenja

NEUTRALNI

$e \in G$

$ex = x \Rightarrow e \in G_x$

INVERZNI

$g \in G_x \Rightarrow gx = x \Rightarrow x = x g^{-1} \Rightarrow g^{-1} \in G_x$

G_x je zatvoren u odnosu na inverz

Time je G_x podgrupa grupe G.

Definicija (fiksirana tačka)

Neka je X G-skup. Element $x \in X$ nazivamo fiksirana tačka skupa X akko $gx = x \quad \forall g \in G$.

Neka je G grupa reda 15 koja djeluje na skup X reda 22. Pretpostavimo da skup X nema fiksiranih tački. Odrediti broj orbita.

Rj. Kako je G konačna grupa to $|G| = \underbrace{|Gx|}_{\text{orbita elementa } x} \cdot \underbrace{|G_x|}_{\text{stabilizator elementa } x}$

$|G| = 15 \Rightarrow 15 = |Gx| \cdot |G_x|$

$$\Downarrow$$

$$|Gx| \in \{1, 3, 5, 15\}$$

Kako X nema fiksiranih tački to $|Gx| \in \{3, 5, 15\}$

Znamo da orbite particionišu skup X.

Ako postoji orbita veličine 15 tada tada suma elemenata iz ostalih orbita je $=7$.

X

15	7

#kontradikcija
$(3+3=6,\ 3+5=8,\ 3+3+3=9)$ $\Rightarrow |Gx| \in \{3, 5\}$

Da li je moguće da postoje tačno dvije orbite veličine 3

X

3	3	16

$\Rightarrow$ suma ostalih orbita je $= 16$
#kontradikcija

Isto ćemo dobiti ako pretpostavimo da postoje tačno tri orbite veličine 3.

Šta je sa slučajem četri orbite veličine?

X

3	3	3	3	5	5

$\Rightarrow$ Postoji 6 orbita.

(#) Neka je X G-skup i neka su x i x' dva elementa iz iste orbite. Pokazati da za stabilizatore G_x i $G_{x'}$ postoji $g \in G$ t.d. $gG_xg^{-1} = G_{x'}$.

Rj:

x i x' su iz iste orbite $\Rightarrow$ $\exists g \in G$ t.d. $gx = x'$

$gx = x' \Rightarrow x = g^{-1}x'$

Pokažimo da je $gG_xg^{-1} \subseteq G_{x'}$.

$a \in gG_xg^{-1} \Rightarrow \exists h \in G_x \quad a = ghg^{-1}$

$$ax' = (ghg^{-1})x' = g\cdot h(g^{-1}x') = (gh)(x)$$
$$= g(hx) = gx = x' \Rightarrow a \in G_{x'}$$
$$\Downarrow$$
$$gG_xg^{-1} \subseteq G_{x'} \quad \dots(1)$$

Pokažimo sad da je $G_{x'} \subseteq gG_xg^{-1}$.

izab. proizv.

$h \in G_{x'}$ $(hx' = x')$

$(g^{-1}hg)(x) = (g^{-1}h)(gx) = (g^{-1}h)(x') = g^{-1}(hx') = g^{-1}x' = x$

tj. $(g^{-1}hg)(x) = x \Rightarrow ghg^{-1} \in G_x$

$c := ghg^{-1} \Rightarrow c \in G_x \Rightarrow g^{-1}cg \in gG_xg^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow h \in gG_xg^{-1} \Rightarrow G_{x'} \subseteq gG_xg^{-1} \quad \dots(2)$

(1) i (2) $\Rightarrow gG_xg^{-1} = G_{x'}$

Problem Grupa G reda 75 djeluje na skup od 11 elemenata. Ni jedan element nije fiksiran sa svakim elementom g iz G. Koliko orbita ima ova akcija?

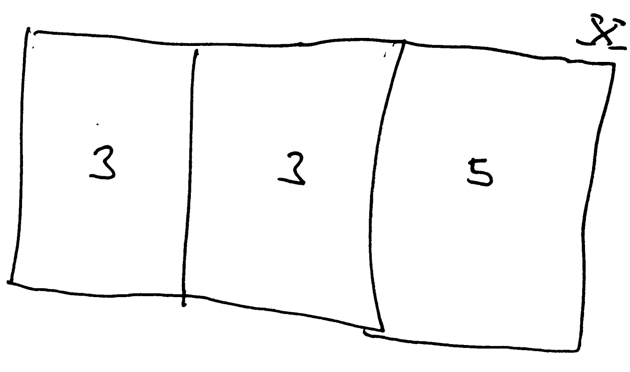
Rj. $|G| = 75$, $|X| = 11$

Znamo da veličina orbite dijeli G pa ako je $|G| = 75$ orbite mogu biti veličine 1, 3, 5.

Kako ne postoji fiksiran element to ne postoji orbita veličine 1.

Također znamo da orbite od X particioniju skup X pa suma veličina orbita mora biti 11.

Jedina mogućnost za ovo je $3 + 3 + 5 = 11$.



Postoje 3 orbite.

Problem Pretpostavimo da G djeluje na X u 4 orbite. Ako je $H \leq G$ sa osobinom $[G:H]=2$ koliko orbita može akcija od H na X imati? Da li će odgovor biti drugačiji ako znamo da X ima neparan broj elemenata.

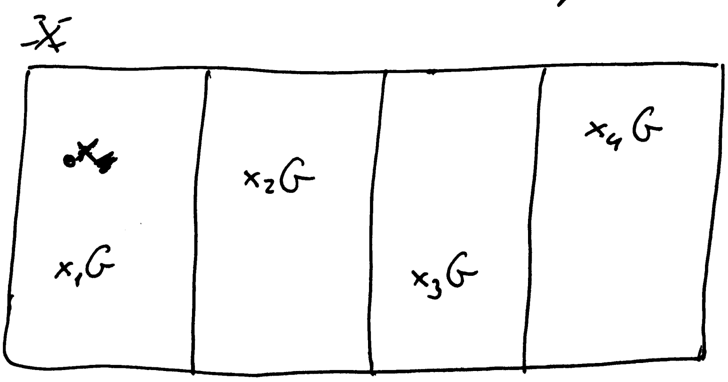
Rj. U OVOM ZADATKU KORISTIĆU DESNU NOTACIJU (djelujem na elemente sa desne strane)

$xG = \{xg \mid g \in G\}$

orbit-stabilizer teorem

$|G| = |xG||G_x|$

G orbite particioniraju skup X



$[G:H]=2 \Rightarrow \frac{|G|}{|H|} = 2$

$|H| = \frac{1}{2}|G|$

$\Downarrow$

$|H| = \frac{1}{2}|G| = \frac{1}{2}|xG||G_x| \quad \ldots(1)$

$H \leq G \Rightarrow H_x \leq G_x \Rightarrow |H| = |xH||H_x| \leq |xH||G_x| \quad \ldots(2)$

(1) i (2) $\quad \frac{1}{2}|xG||G_x| \leq |xH||G_x| \Rightarrow \frac{1}{2}|xG| \leq |xH|$

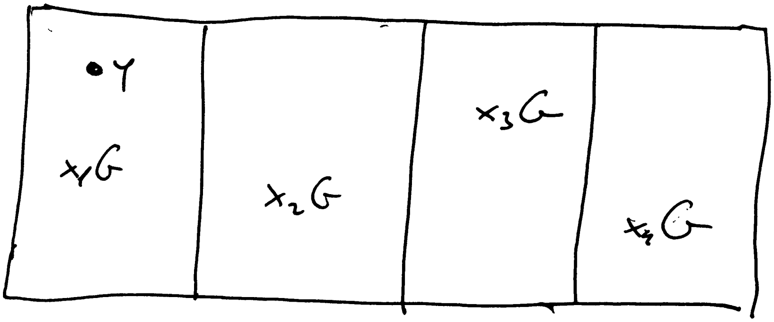
Sad možemo odrediti gornju i donju granicu veliči orbite xH

veličina orbite od xH je najmanje $\frac{1}{2}|xG|$

znamo da veličina orbita xH ne može biti veća od $|xG|$

Kako G na X ima 4 orbite to H na X može imati od 4 do 8 orbita.

Primjedba: Ako je $y \in x_1 G$ tada nijedan element iz H ($H \leq G$) ne može pobaciti y izvan orbite $x_1 G$.



Ako X ima neparan broj elemenata tada bar jedna od orbita x_1G, x_2G, x_3G, x_4G ima neparan broj elemenata a kako xH ne može imati manje od $\frac{1}{2}|xG|$ elemenata to se najmanje jedna orbita od G mora poklopiti sa njom 1 orbita od H.

Drugim riječima broj orbita od H na X se u ovom slučaju kreće od 4 do 7.

Theorem Let X be a G-set. For each $g \in G$, the function $\sigma_g : X \to X$ defined by $\sigma_g(x) = gx$ for $x \in X$ is a permutation of X. Also, the map $\phi : G \to S_X$ defined by $\phi(g) = \sigma_g$ is a homomorphism with the property that $\phi(g)(x) = gx$.

Proof To show that σ_g is a permutation of X, we must show that it is a one-to-one map of X onto itself. Suppose that $\sigma_g(x_1) = \sigma_g(x_2)$ for $x_1, x_2 \in X$. Then $gx_1 = gx_2$. Consequently, $g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2)$. Using Condition 2 in Definition 16.1, we see that $(g^{-1}g)x_1 = (g^{-1}g)x_2$, so $ex_1 = ex_2$. Condition 1 of the definition then yields $x_1 = x_2$, so σ_g is one to one. The two conditions of the definition show that for $x \in X$, we have $\sigma_g(g^{-1}x) = g(g^{-1})x = (gg^{-1})x = ex = x$, so σ_g maps X onto X. Thus σ_g is indeed a permutation.

To show that $\phi : G \to S_X$ defined by $\phi(g) = \sigma_g$ is a homomorphism, we must show that $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ for all $g_1, g_2 \in G$. We show the equality of these two permutations in S_X by showing they both carry an $x \in X$ into the same element. Using the two conditions in Definition 16.1 and the rule for function composition, we obtain

$$\begin{aligned}\phi(g_1 g_2)(x) &= \sigma_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1\sigma_{g_2}(x) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) \\ &= (\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2})(x) = (\sigma_{g_1}\sigma_{g_2})(x) = (\phi(g_1)\phi(g_2))(x).\end{aligned}$$

Thus ϕ is a homomorphism. The stated property of ϕ follows at once since by our definitions, we have $\phi(g)(x) = \sigma_g(x) = gx$. ◆

Theorem Let X be a G-set and let $x \in X$. Then $|Gx| = (G : G_x)$. If $|G|$ is finite, then $|Gx|$ is a divisor of $|G|$.

Proof We define a one-to-one map ψ from Gx onto the collection of left cosets of G_x in G. Let $x_1 \in Gx$. Then there exists $g_1 \in G$ such that $g_1 x = x_1$. We define $\psi(x_1)$ to be the left coset $g_1 G_x$ of G_x. We must show that this map ψ is well defined, independent of the choice of $g_1 \in G$ such that $g_1 x = x_1$. Suppose also that $g_1' x = x_1$. Then, $g_1 x = g_1' x$, so $g_1^{-1}(g_1 x) = g_1^{-1}(g_1' x)$, from which we deduce $x = (g_1^{-1} g_1')x$. Therefore $g_1^{-1} g_1' \in G_x$, so $g_1' \in g_1 G_x$, and $g_1 G_x = g_1' G_x$. Thus the map ψ is well defined.

To show the map ψ is one to one, suppose $x_1, x_2 \in Gx$, and $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. Then there exist $g_1, g_2 \in G$ such that $x_1 = g_1 x$, $x_2 = g_2 x$, and $g_2 \in g_1 G_x$. Then $g_2 = g_1 g$ for some $g \in G_x$, so $x_2 = g_2 x = g_1(gx) = g_1 x = x_1$. Thus ψ is one to one.

Finally, we show that each left coset of G_x in G is of the form $\psi(x_1)$ for some $x_1 \in Gx$. Let $g_1 G_x$ be a left coset. Then if $g_1 x = x_1$, we have $g_1 G_x = \psi(x_1)$. Thus ψ maps Gx one to one onto the collection of right cosets so $|Gx| = (G : G_x)$.

If $|G|$ is finite, then the equation $|G| = |G_x|(G : G_x)$ shows that $|Gx| = (G : G_x)$ is a divisor of $|G|$. ◆